

Se acordă 10 p din oficiu
Partea I (60 puncte) Se acordă 7,5 p pentru fiecare răspuns corect

1.	d)
2.	c)
3.	d)
4.	a)
5.	c)
6.	b)
7.	d)
8	c)

Problema 9

c) Aflați ce rest a obținut Cosmin?
d) Determinați numerele scrise pe tablă știind că Andrei a obținut drept câțuri numere consecutive, iar Cosmin a obținut câțul 23.

Soluție: a) Notăm numerele scrise pe tabla cu a , b și c .
Andrei a obținut resturi egale cu 3 și cu 4, deci sunt posibile două cazuri:
1) $a \equiv 3 \pmod{4}$ și $a \equiv 4 \pmod{3}$, adică două resturi egale cu 3 și c dă restul 4

- două numere, să zicem a și b , dau resturi egale cu 3 și c dă restul 4, deci $a = 5m+3$, $b = 5n+3$ și $c = 5p+4$, unde $m, n, p \in \mathbb{N}$. Obținem $a+b = 5m+5n+6 = 5(m+n+1)+1$, ceea ce înseamnă că restul împărțirii lui $a+b$ la 5 este 1, în contradicție cu ce a obținut Bogdan..... **5p**
- două numere, să zicem a și b , dau resturi egale cu 4 și c dă restul 3, deci $a = 5m+4$, $b = 5n+4$ și $c = 5p+3$, unde $m, n, p \in \mathbb{N}$. În acest caz se verifică ceea ce a obținut Bogdan: împărțite la 5, numerele $a+c$ și $b+c$ dau restul 2, iar $a+b$ dă restul 3..... **5p**

Restul 3.....

Rezultă că $a+b+c = 5m+5n+5p+11 = 5(m+n+p+2)+1$, deci restul împărțirii sumei numerelor scrise pe tablă la 5 este egal cu 1, iar câtul este $m+n+p+2$ **5p**



Adresă: Str. Electroputere, nr. 21, Craiova, Dolj, România;
E-mail: lip@voltaire.ro; Website: www.liceulvoltaire.ro;
tel. 0351413242, 0770261755, fax 0351413241

b) Cosmin a obținut câțul 23, deci $m+n+p+2 = 23$, adică $m+n+p=21$.

Notând cu k cel mai mic câț obținut de Andrei, rezultă că numerele m, n, p sunt egale cu $k, k+1$ și $k+2$ (nu se știe însă în care ordine!). Ca urmare, $m+n+p = k+k+1+k+2=3k+3$, rezultă $3k+3=21$, adică $k=6$ 5p

Așadar, Andrei a obținut câțurile 6, 7, 8 și resturile 3, 4, 4. Obținem trei soluții:

- dacă restul 3 se obține atunci când câțul este 6, numerele sunt $5 \cdot 6+3, 5 \cdot 7+4, 5 \cdot 8+4$, adică 33, 39 și 44.
- dacă restul 3 se obține atunci când câțul este 7, numerele sunt $5 \cdot 6+4, 5 \cdot 7+3, 5 \cdot 8+4$, adică 34, 38 și 44.
- dacă restul 3 se obține atunci când câțul este 8, numerele sunt $5 \cdot 6+4, 5 \cdot 7+4, 5 \cdot 8+3$, adică 34, 39 și 43..... 10p

Barem clasa a VI-a

Se acordă 10 p din oficiu

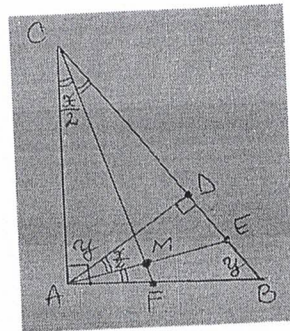
Partea I (60 puncte) Se acordă 7,5 p pentru fiecare răspuns corect

1.	c)
2.	b)
3.	b)
4.	b)
5.	a)
6.	e)
7.	c)
8.	b)

Partea a II-a (30 puncte)

Problema 9

Se consideră triunghiul dreptunghic ABC , cu $\angle A = 90^\circ$ și $AD \perp BC$, unde punctul D se află între B și C . Demonstrați că bisectoarea unghiului ACD este perpendiculară pe bisectoarea unghiului DAB .



Fie $\angle C = x^\circ$ și $\angle B = y^\circ$, în $\triangle ABC$, cum $\angle A = 90^\circ \Rightarrow x^\circ + y^\circ = 90^\circ \Rightarrow x^\circ = 90^\circ - y^\circ$ sau $y^\circ = 90^\circ - x^\circ$ 5p

În $\triangle DAB$, $\angle D = 90^\circ$, $\angle B = y^\circ \Rightarrow \angle DAB = 90^\circ - y^\circ = x^\circ$ 5p

$\angle CAD = \angle CAB - \angle DAB = 90^\circ - x^\circ = y^\circ$ 5p

Fie CF bisectoarea unghiului ACD , $F \in AB \Rightarrow \angle ACF = \angle FCB = \frac{x^\circ}{2}$

AE bisectoarea unghiului DAB , $E \in DB \Rightarrow \angle DAE = \angle EAB = \frac{x^\circ}{2}$ 5p

Fie $CF \cap AE = \{M\}$. În $\triangle CAM$, avem:

$\angle AMC = 180^\circ - (\angle ACM + \angle CAM) = 180^\circ - \left(\frac{x^\circ}{2} + \frac{x^\circ}{2} + y^\circ\right) = 180^\circ - (x^\circ + y^\circ) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ \Rightarrow CF \perp AE$ 10p



Barem clasa a VII-a

Se acordă 10 p din oficiu

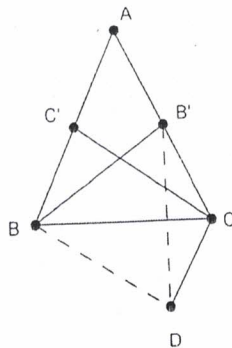
Partea I (60 puncte) Se acordă 7,5 p pentru fiecare răspuns corect

1.	b)
2.	d)
3.	d)
4.	b)
5.	c)
6.	e)
7.	c)
8.	e)

Partea a II-a (30 puncte)

Problema 9

În triunghiul ABC, BB' este bisectoarea unghiului ABC, CC' este bisectoarea unghiului ACB, B' ∈ [AC], C' ∈ [AB]. Știind că [BB'] ≡ [CC'], demonstrați că Δ ABC este isoscel.



Rezolvare:

Presupunem $\angle B \neq \angle C$ și fie $\angle B < \angle C \Rightarrow B'C < BC'$ (1)

Ducem $BD \parallel CC'$ și $CD \parallel AB \Rightarrow BDCC'$ paralelogram 10p

$$\Rightarrow \angle BB'D \equiv \angle B'DB$$

$$\text{Din (1)} \Rightarrow \angle DB'C > \angle B'DC$$

$$\text{Avem } \angle BB'D + \angle DB'C > \angle B'DC + \angle B'DB = \angle BC'C \dots\dots\dots 10p$$

$$\Rightarrow 180^\circ - \angle B - \frac{\angle C}{2} < 180^\circ - \angle C - \frac{\angle B}{2} \Rightarrow \angle C < \angle B \text{ ceea ce este absurd} \Rightarrow \text{Presupunere falsă}$$

$$\Rightarrow \angle B \equiv \angle C \Rightarrow \Delta ABC \text{ este isoscel} \dots\dots\dots 10p$$



Adresă: Str. Electroputere, nr. 21, Craiova, Dolj, România;
E-mail: lipfvoltaire@gmail.com; Website: www.liceulvoltaire.ro;
tel. 0351413242, 0770261755, fax 0351413241

Barem clasa a VIII-a

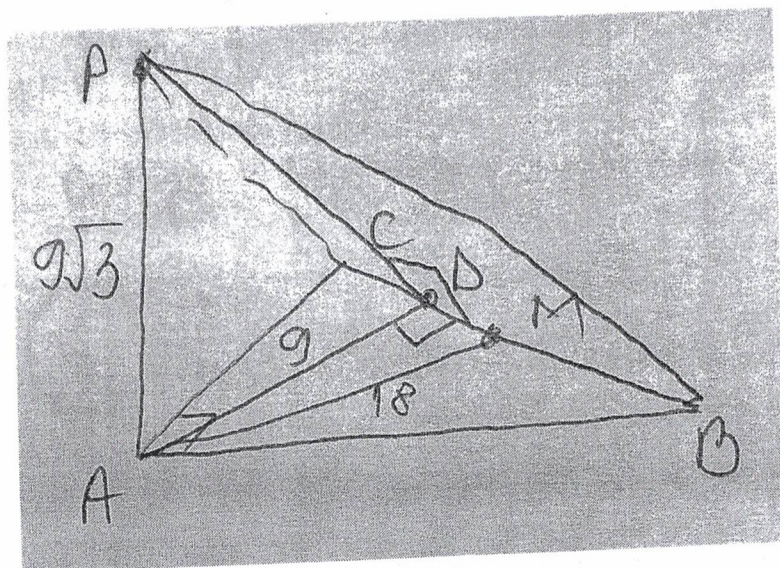
Se acordă 10 p din oficiu

Partea I (60 puncte) Se acordă 7,5 p pentru fiecare răspuns corect

1.	b)
2.	e)
3.	d)
4.	c)
5.	b)
6.	b)
7.	d)
8.	b)

Partea a II-a (30 puncte)

Problema 9





Adresă: Str. Electroputere, nr. 21, Craiova, Dolj, România;
E-mail: lipfvtaire@gmail.com; Website: www.liceulvttaire.ro;
tel. 0351413242, 0770261755, fax 0351413241

Ducem $AD \perp BC$, $D \in (BC)$, $AD = \frac{AB \cdot AC}{BC}$. Mediana $AM = \frac{BC}{2} = 18 \text{ cm}$

$AM = \sqrt{AB \cdot AC} \Rightarrow AB \cdot AC = 18^2$, deci $AD = \frac{18^2}{36} = 9 \text{ cm}$ 10p

$\left. \begin{array}{l} AP \perp (ABC) \\ AD \perp BC \\ AD, BC \subset (ABC) \end{array} \right\} \overline{T_3} \perp PD \perp BC$ 5 p

În $\triangle PAD$, $m(\hat{A}) = 90^\circ$, rezultă cf. T.P. $PD^2 = PA^2 + AD^2 \Rightarrow PD = 18 \text{ cm}$5p

$\left. \begin{array}{l} (PBC) \cap (ABC) = BC \\ DP \perp BC, DP \subset (PBC) \\ DA \perp BC, DA \subset (ABC) \end{array} \right\} \Rightarrow \angle((PBC), (ABC)) = \angle(DP, DA) = \angle PDA$ 5p

$AD = \frac{PD}{2} \Rightarrow \widehat{APD} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{PDA} = 60^\circ$5p

Barem clasa a IX-a Real

Se acordă **10 p** din oficiu

Partea I (60 puncte) Se acordă **7,5 p** pentru fiecare răspuns corect

1.	b)
2.	d)
3.	d)
4.	c)
5.	a)
6.	c)
7.	b)
8.	c)

Partea a II-a (30 puncte)

Problema 9

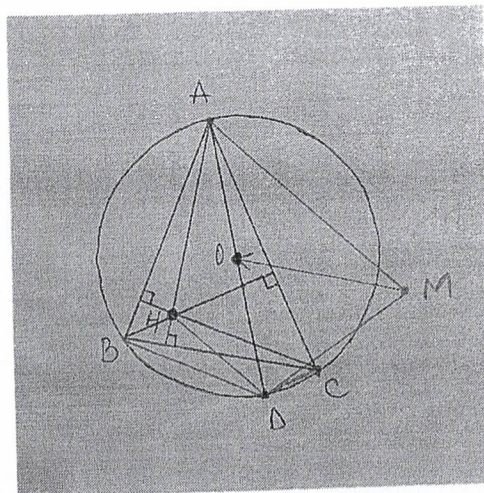
Fie ABC un triunghi, O centrul cercului circumscris triunghiului și H ortocentrul triunghiului. Demonstrați că:

- a) oricare ar fi un punct M din planul triunghiului, verifică relația

$$\overrightarrow{MH} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - 2 \cdot \overrightarrow{MO};$$

- b) $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$

- c) punctele O, G, H sunt coliniare, unde G este centrul de greutate al triunghiului (dreapta lui Euler).



- a) Fie D diametral opus lui A. $\widehat{DCA} = 90^\circ$ (unghi înscris în semicerc)

$$\Rightarrow DC \perp AC, \text{ dar } BH \perp AC \Rightarrow DC \parallel BH \quad (1)$$

$\widehat{DBA} = 90^\circ$ (unghi înscris în semicerc) $\Rightarrow DB \perp AB$, dar $CH \perp AB \Rightarrow DB \parallel CH$ (2)

Din (1) și (2) $\Rightarrow HCDB$ paralelogram $\Rightarrow \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{BD}$ 5p

$$2\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD}; \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HD}; \overrightarrow{HD} = \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC}$$

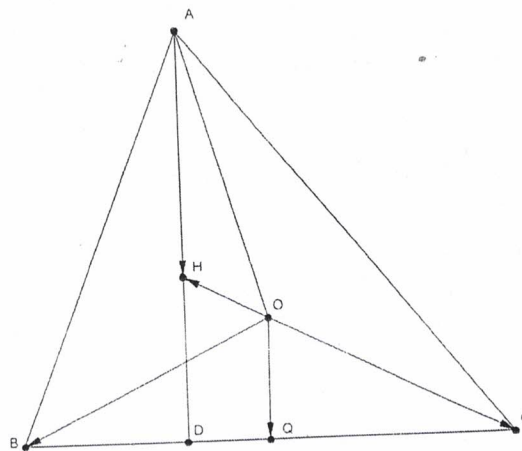
$$\Rightarrow 2\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC}$$

$$\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MH}; \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MH}$$

Obținem $2\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MH} \Leftrightarrow$ relația cerută5p

b) Dacă M coincide cu O rezultă relația cerută 10p

Soluție alternativă:



$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}. \text{ (Teorema lui Sylvester).}$$

În triunghiul ABC considerăm punctele Q mijlocul segmentului [BC], O centrul cercului circumscris, $D \in BC$ astfel încât $AD \perp BC$ și $H \in AD$ astfel încât $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OQ}$.

Din $\triangle OBC$, folosind relația medianei, se obține: $2\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ și avem $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ 5p

Din $\triangle OAH$ rezultă $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AH}$ și se obține relația: $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

Deoarece vectorul $\overrightarrow{OH}$ nu depinde de ordinea în care apar vectorii $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, relația $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ fiind simetrică, rezultă că punctul H este punct comun înălțimilor triunghiului ABC. 5p

$$\text{c) } \overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3} = \frac{1}{3} \overrightarrow{OH} \text{ 5p}$$

$$\Rightarrow O, G, H \text{ coliniare 5p}$$



Adresă: Str. Electroputere, nr. 21, Craiova, Dolj, România;
E-mail: lipfvoltaire@gmail.com; Website: www.liceulvoltaire.ro;
tel. 0351413242, 0770261755, fax 0351413241

Barem clasa a IX-a Umanist

Se acordă **10 p** din oficiu

Partea I (60 puncte) Se acordă **7,5 p** pentru fiecare răspuns corect

1.	c)
2.	b)
3.	a)
4.	c)
5.	d)
6.	b)
7.	c)
8.	d)

Partea a II-a (30 puncte)

Problema 9

Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 - 3mx + m$, $m \in \mathbb{R}$.

- Pentru $m = 1$, rezolvați ecuația $f(x) = 0$.
b) Determinați numărul real m astfel încât punctul $A(1; 4)$ să fie situat pe graficul funcției f .
c) Determinați numărul real m astfel încât rădăcinile ecuației $f(x) = 0$ să verifice relația $2(x_1 + x_2) = 3x_1 x_2$.
- Pentru $m = 1$, avem $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ 1p
 $f(x) = 0 \Rightarrow 2x^2 - 3x + 1 = 0$ 3p
 $\Delta = 1$, $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 1$ 6p
 - Condiția $A(1; 4) \in G_f \Leftrightarrow f(1) = 4$ 5p
 $m = -1$ 5p
 - $x_1 + x_2 = \frac{3m}{2}$, $x_1 x_2 = \frac{m}{2}$ 5p
 $2 \cdot \frac{3m}{2} = \frac{3m}{2} \Rightarrow m = 0$ 5p



Adresă: Str. Electroputere, nr. 21, Craiova, Dolj, România;
E-mail: liceulvttaire@gmail.com; Website: www.liceulvttaire.ro;
tel. 0351413242, 0770261755, fax 0351413241

Barem clasa a X-a Real

Se acordă **10 p** din oficiu

Partea I (60 puncte) Se acordă **7,5 p** pentru fiecare răspuns corect

1.	b)
2.	e)
3.	a)
4.	c)
5.	c)
6.	e)
7.	e)
8.	a)

Partea a II-a (30 puncte)

Problema 9

O grădină de forma unui triunghi echilateral cu latura de 500 m, împrejmuită cu gard, este împărțită în părți egale de forma unor triunghiuri echilaterale cu latura de 5m, având laturile paralele cu gardurile exterioare ale grădinii. În fiecare triunghi a crescut câte o varză.

Un iepure se plimbă prin grădină, trecând dintr-un triunghi în altul care are o latură comună cu primul, fără să treacă de două ori prin același triunghi.

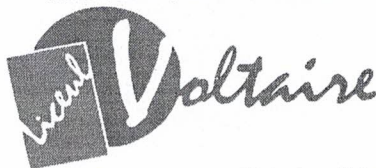
- Câte verze sunt în grădină ?
- Care este numărul maxim de verze care pot fi mâncate de iepure la o trecere prin grădină ?

Soluție:

- Gândind triunghiul mare împărțit în 100 de nivele, pe nivelul k de la vârf spre bază se vor afla $2k - 1$ triunghiuri. **5p**

În total, grădina are $1 + 3 + 5 + \dots + 199 = 10000$ de verze **5p**

- Colorăm triunghiurile mici alternativ în alb și negru, ca la tabla de șah, astfel încât triunghiurile din vârfurile triunghiului mare să fie negre.
Pe nivelul k avem k triunghiuri negre, deci numărul total de triunghiuri negre va fi $1 + 2 + 3 + \dots + 100 = 5050$ **5p**
Restul de 4950 sunt triunghiuri albe. În plimbarea iepurelui se alternează triunghiurile albe și negre, iar traseul va fi maximal când pleacă dintr-un triunghi negru, parcurge toate triunghiurile albe și se termină într-un triunghi negru. Numărul maxim de triunghiuri parcurse, deci numărul maxim de verze ce pot fi mâncate de iepure, va fi $2 \cdot 4950 + 1 = 9901$ **15p**



Adresă: Str. Electroputere, nr. 21, Craiova, Dolj, România;
E-mail: lipfvoltaire@gmail.com; Website: www.liceulvoltaire.ro;
tel. 0351413242, 0770261755, fax 0351413241

Barem clasa a X-a Umanist

Se acordă **10 p** din oficiu

Partea I (60 puncte) Se acordă **7,5 p** pentru fiecare răspuns corect

1.	d)
2.	b)
3.	a)
4.	d)
5.	e)
6.	c)
7.	d)
8.	c)

Partea a II-a (30 puncte)

Problema 9

Să se arate că $a^{\lg \frac{b}{c}} \cdot b^{\lg \frac{c}{a}} \cdot c^{\lg \frac{a}{b}} = 1, \forall a, b, c \in R_+^*$.

$$a^{\lg \frac{b}{c}} \cdot b^{\lg \frac{c}{a}} \cdot c^{\lg \frac{a}{b}} = 1 \Leftrightarrow \lg \left(a^{\lg \frac{b}{c}} \cdot b^{\lg \frac{c}{a}} \cdot c^{\lg \frac{a}{b}} \right) = 0 \dots\dots\dots 10p$$

$$\lg \frac{b}{c} \cdot \lg a + \lg \frac{c}{a} \cdot \lg b + \lg \frac{a}{b} \cdot \lg c = 0 \dots\dots\dots 10p$$

$$(\lg b - \lg c) \lg a + (\lg c - \lg a) \lg b + (\lg a - \lg b) \lg c = 0 \text{ adevărat } \dots\dots\dots 10p$$

Barem clasa a XI-a Real

Se acordă **10 p** din oficiu

Partea I (60 puncte) Se acordă **7,5 p** pentru fiecare răspuns corect

1.	c)
2.	b)
3.	a)
4.	b)
5.	d)
6.	d)
7.	e)
8.	e)

Partea a II-a (30 puncte)

Problema 9

Marc vrea să planteze în curtea casei sale meri și peri. Curtea are forma unui pătrat cu latura de $16m$, pe care Marc îl împarte în 16 pătrate egale cu latura de $4m$ și în centrul fiecărui pătrat mic plantează câte un pom. El își propune ca pe fiecare rând orizontal sau vertical să aibă câte un număr impar de meri.

b) Câte modalități de plantare există?

c) Dacă grădina ar fi avut dimensiunile $20m \times 16m$, împărțită în 20 de pătrate cu latura de $4m$, câte modalități de plantare ar exista?

Soluție:

a) Gândim grădina ca pe o matrice 4×4 cu elemente ± 1 , unde 1 corespunde unui păr, iar -1 unui măr. Dorim ca produsele elementelor de pe fiecare linie și de pe fiecare coloană să fie -1 **10p**
Oricum s-ar completa cu ± 1 matricea aflată la intersecția primelor trei linii cu primele trei coloane, avem completare unică pentru primele trei elemente ale liniei 4 și pentru primele trei elemente ale coloanei 4. **10p**
Poate fi completat unic și elementul de pe poziția $(4,4)$, prin urmare vom avea atâtea modalități de plantare câte matrice există în $M_2(\{-1,1\})$, adică $2^9 = 512$ **5p**

b) Cu raționamentul de mai înainte, nu vom reuși să completăm poziția $(4,5)$, din motive de nepotrivire a parității, deci în acest caz există 0 modalități de plantare. **5p**

Barem clasa a XI-a Umanist

Se acordă **10 p** din oficiu

Partea I (60 puncte) Se acordă **7,5 p** pentru fiecare răspuns corect

1.	c)
2.	b)
3.	c)
4.	e)
5.	d)
6.	a)
7.	e)
8.	c)

Partea a II-a (30 puncte)

Problema 9

Într-un portofel avem monede de 50 de cenți și monede de 2 euro. În total 15 monede pentru o valoare de 15 euro. Câte monede sunt din fiecare fel?

Fie x numărul monedelor de 50 cenți

y numărul monedelor de 2 euro

Obținem $x + y = 15$ (1) 5p

2 euro = 4 · 50 cenți ; 15 euro = 30 · 50 cenți 5p

$x \cdot 50 \text{ cenți} + y \cdot 2 \text{ euro} = 15 \text{ euro} \Leftrightarrow x \cdot 50 \text{ cenți} + y \cdot 4 \cdot 50 \text{ cenți} = 30 \cdot 50 \text{ cenți} \Leftrightarrow$

$x + 4y = 30$ (2) 10p

Rezolvând sistemul format din ecuațiile (1) și (2), obținem $x = 10$ și $y = 5$ 10p

Barem clasa a XII-a Real

Se acordă 10 p din oficiu

Partea I (60 puncte) Se acordă 7,5 p pentru fiecare răspuns corect

1.	c)
2.	e)
3.	e)
4.	a)
5.	b)
6.	a)
7.	b)
8.	c)

Partea a II-a (30 puncte)

Problema 9

Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, se consideră funcțiile $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = |\sin nx|$ și numerele

$$I_n = \int_{\pi}^{2\pi} \frac{f_n(x)}{x} dx$$

a) Să se calculeze $\int_0^{\pi} f_2(x) dx$.

b) Demonstrați că $I_n \leq \ln 2$

c) Arătați că: $I_n \geq \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \right)$

a) $\int_0^{\pi} f_2(x) dx = \int_0^{\pi} |\sin 2x| dx = \dots\dots\dots 1p$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin 2x dx = \dots\dots\dots 5p$

$= -\frac{\cos 2x}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\cos 2x}{2} \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 2 \dots\dots\dots 4p$

b) $I_n = \int_{\pi}^{2\pi} \frac{|\sin nx|}{x} dx \leq \int_{\pi}^{2\pi} \frac{1}{x} dx = \ln 2 \dots\dots\dots 10p$

c) Dacă facem substituția $nx = t$, rezultă că:

$$I_n = \int_{n\pi}^{2n\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt + \int_{(n+1)\pi}^{(n+2)\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt + \dots + \int_{(2n-1)\pi}^{2n\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt \dots 5p$$

Cum, pentru $k = n, n+1, \dots, (2n-1)$, $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt \geq \frac{1}{(k+1)\pi} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t| dt = \frac{2}{(k+1)\pi}$

(deoarece, cu substituția $y = t - k\pi$ avem: $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t| dt = \int_0^{\pi} |\sin y| dy =$

$\int_0^{\pi} \sin y dy = -\cos y \Big|_0^{\pi} = 2$), rezultă că $I_n \geq \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \right) \dots\dots\dots 5p$